**Docentenhandleiding bij K1348 Voorbereiding HBO Wiskunde voor de techniek-I-Breed**

Algemeen: Aan de hand van een flink stuk formele wiskunde raakt de student vertrouwd met de wiskunde, die bij technische vervolgstudies gebruikt wordt als taal om allerlei vraagstukken op te lossen. Praktische voorbeelden worden incidenteel gebruikt.
In sommige passages wordt gekozen voor een bepaalde didaktiek. Het staat de lezer natuurlijk vrij om daarin andere keuzes te maken.
Voorts nemen we in ogenschouw, dat we bij dit keuzedeel niet te maken hebben met studenten, die een wiskundestudie doen.

Vooraf: Het kan zijn, dat in de methode, die u gebruikt, de f(x)-notatie af en toe voorkomt.
Vervang *in K1348* deze notatie dan door de x-y-notatie. Voorbeeld:
Vervang f(x) = 3x + 2 door y = 3x + 2. De meeste mbo-studenten kennen de f(x)-notatie nog niet.

***DEELEXAMEN 1***
In het eerste semester komen vooral de basisvaardigheden aan de orde. Aanvankelijk met getallen, later met letters. Overgang van de basiswiskunde (onderbouw BOL 4) naar de meer formele wiskunde van het HTO.

**Rekenregels, haakjes wegwerken, merkwaardige producten en ontbinden in factoren**

1. Allereerst aandacht voor de rekenvolgorde. Daarbij wordt tegenwoordig een betere ezelsbrug gebruikt: **H**oe **m**oeten **w**e **v**an **d**e **o**nvoldoendes **a**fkomen?
2. Haakjes wegwerken en merkwaardige producten.

Sta stil bij: -2(a + b) = -2a – 2b en 2 – (a + b) = 2 – a – b
 (a + b) – 2 = a + b – 2 en (a + b) ∙ -2 = ………..
 -5 = -1∙5, dus -(a + b) = -1∙(a + b) = -a – b
 3(a ∙ b) = 3ab en niet 3a ∙ 3b

Het verdient aanbeveling om ook al het volgende te bespreken:
 a.d.h.v. al dan niet gelijksoortige termen (zo ook bij aftrekken)
 a.d.h.v. uitschrijven als vermenigvuldiging. Voorbeeld:

En dus en
3. Ontbinden in factoren.
Een techniek die gebruikt kan worden bij het vereenvoudigen van breuken en bij het oplossen van sommige vergelijkingen.
Ontbinden in factoren = een vorm maken, waarin de laatste bewerking ‘vermenigvuldigen’ is.
Dus: Ontbind x2 + 7x + 12 geeft (x + 3)(x + 4) en niet x(x + 7) + 12.

 **Breukvormen en machten**

1. Breuken.

Eerst met getallenvoorbeelden het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken bespreken. De pizzapunt kan dienst doen.
6 : = Hoe vaak kan ik driekwart pizza uit 6 pizza’s halen? 8 keer. Dus: 6 : = 8.
Of: 6 : = : = ∙ = = 8
Vervolgens de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met letterbreuken. Bruikbaar voorbeeld:
Bij twee parallel geschakelde weerstanden R1 en R2 geldt voor de vervangingsweerstand Rv:
 . Hieruit volgt: → .…..

Breuken vereenvoudigen.
 want
 ? Neen, want
 ? Ja,
In is in teller en noemer de laatste bewerking ‘vermenigvuldigen’. De gemeenschappelijke factor 2 mag worden weggedeeld.
Het verschil tussen ‘term’ en ‘factor’ vermelden.
Voorbeeldopgaven: Vereenvoudig , , ,
2. Machten.
Rekenregels voor machten aannemelijk maken a.d.h.v. voorbeelden. Pas ‘machten uitschrijven’ en ‘breuken vereenvoudigen’ toe.
Nieuwe machten als 30 of 3-2 op een natuurlijke wijze laten ontstaan uit de regel .
Uit de techniek weten veel studenten dat 10-1 = 0,1 , 10-2 = 0,01 enz. Verklaar dit met de regel . Memoreer dat machten van 10 het meest voorkomen in de techniek.
Relateer aan de voorvoegsels micro, milli, kilo, mega, giga, enz.

Voor machten met gebroken exponent eerst hogeremachtswortels introduceren.
 omdat . Ooit stond er: omdat .
Nieuw: omdat
 5 omdat
 omdat
 omdat en dan
 op twee manieren:
1. Via wortels omdat
2. Bestaande rekenregels voor machten gebruiken
Vraag: Ligt dichter bij dan bij ?
Bespreek: , en . Ga na met de rekenmachine:
Tot slot: -5 = -1 ∙ 5
en dus: -32 = -1 ∙ 32 = -1 ∙ 9 = -9 (‘machtsverheffen’ gaat voor ‘vermenigvuldigen’)
-32 dus zien als -(32)
maar: (-3)2 = -3 ∙ -3 = 9
Bereken -32 en (-3)2 op de rekenmachine.
3. Wortels
Rekenregels voor machten zijn automatisch rekenregels voor wortels.
Voorbeeld: voor geeft .
Welke rekenregel voor wortels komt voort uit ?

De mate waarin het geleerde wordt toegepast in een eenvoudige context, is aan de betrokken docent ter invulling.

***DEELEXAMEN 2***

**Vergelijkingen oplossen en Formules bewerken**

1. Techniekjes, die je kunt gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen, zijn:
‘de balansmethode’, ’kruislings vermenigvuldigen’ en ‘oplossen m.b.v. ontbinden in factoren’. Speciaal bij tweedegraadsvergelijkingen wordt de abc-formule besproken, waarbij via de discriminant ook het aantal oplossingen wordt vastgelegd.
De kreet ’kruislings vermenigvuldigen’ overigens alleen gebruiken bij vergelijkingen van het type ‘*breuk* = *breuk*’.

Wat betekent eigenlijk, dat x = 2 de oplossing is van de vergelijking 7x – 5 = 4x + 1?
Antw.: x = 2 is (in dit geval) de enige x, die na invulling ervoor zorgt, dat 7x – 5 = 4x + 1.
2. Het aardige is, dat bij het omwerken van formules, de methodes voor het oplossen van vergelijkingen gebruikt kunnen worden. Voorbeeld:
Opgave ‘vergelijking oplossen’: Opgave over ‘formule omwerken’:
Bereken *x* uit: Druk *x* uit in de overige variabelen:

 moeilijkste stap

Dus:
Als je *x* moet isoleren uit , stel jezelf dan de vraag:
Hoe zou ik *x* moeten berekenen, als *a*, *b*, *c* en *d* bekend zouden zijn. Kies eens tijdelijk voor *a*, *b*, *c* en *d* getallen. Zie verder bovenstaand voorbeeld.

**Lineaire en Exponentiële functies/vergelijkingen en Logaritmen**

 Onderstaande bespreking van de eigenschappen/kenmerken van de lineaire- en exponentiele
 functies zijn op dit moment ondergeschikt aan de technieken om vergelijkingen op te lossen.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y |  | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 |

1. Lineaire functies (al redelijk bekend bij de meeste studenten)
Allereerst beginnen met de basisformule y = ax + b.
Introduceer de richtingscoëfficiënt a.d.h.v. formule en tabel. Voorbeeld:
Formule y = x +2. Tabel:

Definieer ∆x en ∆y als toename x resp. toename y.
Zie tabel: Als ∆x = 1, dan ∆y =
 Als ∆x = 3, dan ∆y = 2
 Als ∆x = 4, dan ∆y = 3
 Als ∆x = 8, dan ∆y = 6
Telkens is: . Deze heet richtingscoëfficiënt …. = a uit de formule ‘y = ax + b’.



 De grafiek van y = x +2

Is a > 0, dan stijgt de lijn (van links naar rechts gekeken).
Is a < 0, dan daalt de lijn.

De lijn y = 3x + 1 loopt steiler dan de lijn y = 2x + 1, omdat ….

Richtingscoëfficiënt kennen studenten misschien ook als ‘hellingsgetal’ of ‘helling’.

Bij het onderwerp ‘Differentiëren’ komt de breuk weer aan de orde.

Het snijpunt berekenen van twee lijnen.
Voorbeeld:
Twee taxibedrijven Pieters en Willems gebruiken de volgende tarieven:
Pieters: voorrijkosten € 4, per gereden km € 0,25
Willems: voorrijkosten € 5, per gereden km € 0,20
Laat de studenten de kosten berekenen bij een ritje van 20 km.
Ze zullen dat gedaan hebben via € 4 + € 0,25 ∙ 20 en € 5 + € 0,20 ∙ 20.
Dit geeft de kostenformules KP = € 4 + € 0,25 ∙ x en KW = € 5 + € 0,20 ∙ x met x = aantal km.
De grafieken van y = 4 + 0,25 ∙ x en y = 5 + 0,20 ∙ x laten het snijpunt (20, 9) zien, waarbij het snijpunt kan worden berekend door een x te zoeken, waarvoor 4 + 0,25 ∙ x = 5 + 0,20 ∙ x.
Met de *balansmethode* kunnen we verder: 4 + 0,25 ∙ x = 5 + 0,20 ∙ x
 (links en rechts 4 en 0,20 ∙ x aftrekken) 0,05 ∙ x = 1
 (links en rechts delen door 0,05) x = 20

De ongelijkheid 5 + 0,20 ∙ x < 4 + 0,25 ∙ x kan vervolgens grafisch worden opgelost.



 y = 5 + 0,20 ∙ x en
 y = 4 + 0,25 ∙ x

5 + 0,20 ∙ x < 4 + 0,25 ∙ x x > 20.
Heb je een taxirit langer dan 20 km, dan kun je beter taxibedrijf Willems kiezen.
Wordt de ongelijkheid algebraïsch opgelost, dan dient men stil te staan bij de stappen, waarbij het ongelijkheidsteken omdraait.

Bij het berekenen van snijpunten kan desgewenst het ‘stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden’ worden besproken. Zo’n stelsel kan worden opgelost met behulp van de eliminatiemethode of de substitutiemethode.

1. Exponentiële functies …. als introductie bij het onderwerp Logaritmen.
Klassiek introductievoorbeeld is een bedrag wat jaarlijks met 2% toeneemt.
Bijv. beginbedrag is € 500 (t = 0)
Na 1 jaar bedrag B = 500 ∙ 1,02 = 510
Na 2 jaar B = 500 ∙ 1,02 ∙ 1,02 = 520,20
Na 3 jaar B = 500 ∙ 1,02 ∙ 1,02 ∙ 1,02 = 500 ∙ 1,023
Na t jaar B = ……………………………………. = 500 ∙ 1,02t met t het aantal jaren
In de formule is 500 de beginwaarde en 1,02 de groeifactor.
Laat B eens met de formule uitrekenen bij t = 0.
Maak een t-B-tabel en bijbehorende grafiek. Noem het begrip ‘asymptoot’.
Geef in de tabel aan hoe de groeifactor uit de formule te achterhalen is.
Een groeifactor kan alleen per tijdseenheid gevraagd worden!
Wat zou t = -1 betekenen?
Bespreek y = b ∙ gt als g > 1, als g = 1 en als 0 < g < 1.
Exponentiële vergelijkingen kunnen op dit moment worden opgelost door links en rechts van het ‘=-teken’ machten met hetzelfde grondtal te maken. Voorbeeld:
Los op:

Als logaritmen geïntroduceerd zijn, kan uit de regel 8log volgen. Enz.
2. Logaritmen.
Introduceer de bewerking *log*. Bespreek ook rekenregels voor en vergelijkingen met logaritmen.
De meeste mbo-ers hebben de bewerking *log* nog niet gehad.
Een mooi startprobleem is: Na hoeveel jaar is onze € 500 verdubbeld?
Dit geeft 1000 = 500 ∙ 1,02t ofwel 1,02t = 2.
Een onbekende exponent moet worden berekend!
Introductie:
We weten, als x2 = 7 dan (o.a.) x =
 als x3 = 7 dan x = Bij een onbekend grondtal krijgen we te maken met
 wortels. = 7
Maar nu: als 3x = 7 dan ?? Bij een onbekende exponent krijgen we te maken met
 logaritmen. We definiëren x = 3log 7
 (uitspraak: x = de 3-de logaritme van 7)
 Dus = 7 Kan de student 3log 7 schatten? (tussen 1 en 2)
Zo ook Kan de student 5log 41 schatten? (tussen 2 en 3)
 Blijkbaar is 2log 8 = 3
Ander voorbeeld:
 Blijkbaar is 5log 25 = 2

We schrijven het anders:
 2log 8 = 3 omdat 23 = 8
5log 25 = 2 omdat 52 = 25
 3log 9 = .. omdat 3.. = 9
3log 81 = .. omdat 3.. = 81
 3log = .. omdat 3.. =
7log = .. omdat 7.. = Algemeen: glog b = c ↔ gc = b

10log 100 = .. omdat 10.. = 100
10log 0,01 = .. omdat 10.. = 0,01
 10log = .. omdat 10.. =
Logaritmen met grondtal 10 komen in de techniek het meest voor. Om die reden heeft men ooit de 10 weggelaten.
Dus log 100 = 10log 100 = 2.
Log-toets op de rekenmachine is de logaritme met grondtal 10 !
Sta eventueel stil bij de voorwaarden bij logaritmen (grondtal > 0 en ≠ 1 en argument > 0)
De student zal vragen: ’Hoe reken je 3log 7 uit met de rekenmachine?’.
Weggeven dat alog b = (we komen er bij ‘Rekenregels voor logaritmen’ op terug).
 dus 3log 7 = = 1,77.. . (inderdaad tussen 1 en 2) Wat reken je uit bij 3log 7?
Laat checken met de rekenmachine, dat 31,77.. = 7

Kijk nog even terug naar: Na hoeveel jaar is onze € 500 verdubbeld?
1000 = 500 ∙ 1,02t ofwel 1,02t = 2 → t = 1,02log 2 ≈ 35 jaar.

Rekenregels voor logaritmen.
 = a is hierboven belicht **(1)**glog(a) + glog(b) = glog(ab) **(2)** en glog(a) – glog(b) = glog() **(3)** aannemelijk maken a.d.h.v. getallenvoorbeelden.

Rekenregel **(4)** zou als volgt het daglicht kunnen zien:
x + x + x = 3x. Dus glog(a) + glog(a) + glog(a) = 3∙glog(a)
Anderzijds is glog(a) + glog(a) + glog(a) = glog(a∙a∙a) = glog(a3) volgens rekenregel **(2)**
Dus: glog(a3) = 3∙glog(a). Algemeen: glog(ap) = p∙glog(a) **(4)**

Rekenregel **(5)**:
 alog b = c **(\*)** ↔ ac = b
 glog(ac) = glog(b) met voor g een ‘willekeurig’ grondtal
 c∙glog(a) = glog(b) zie **(4)** c =
 alog b = zie **(\*)**Bij g = 10 krijgen we alog b = , een ons welbekende regel.

Vergelijkingen oplossen m.b.v. logaritmen.
Een voorbeeld zagen we al: 1000 = 500 ∙ 1,02t. Een exponentiële vergelijking waarbij *log* gebruikt wordt.
Bespreek de fout: log(x) + log(2) = log(6) ↔ x + 2 = 6 ↔ x = 4.
Wel goed: log(x) + log(2) = log(6) ↔ log(2x) = log(6) ↔ 2x = 6 ↔ x = 3.
Aandacht voor ‘schrijf een getal als willekeurige logaritme’. Voorbeeld: 5 = 4log(…)
Gebruik de definitie van logaritme en je krijgt: 45 = … . Dus 5 = 4log(45).

De mate waarin het geleerde wordt toegepast in een eenvoudige context, is aan de betrokken docent ter invulling.

Nawoord:
Bij de samenstelling van deze handleiding is de vigerende examenmatrijs leidraad geweest.
Wijzigingen in deze matrijs hebben ook veranderingen in deze docentenhandleiding tot gevolg.
(Examenmatrijs: <https://stichtingstem.nl/>  inloggen op STEMTOETS noodzakelijk: Examenmatrijs
K1348 ……..)

Henk Jansen
docent K1348/K1349, ROC-Nijmegen
docent vhto, HAN

Elst 21-8-2024