

# Gezien de verschillen

In kringen van het wiskundeonderwijs in Nederland is de naam **Van der Blij** een zeer bekende. Toch is het voor de lezers wellicht aardig ook wat persoonlijke dingen te vertellen.

*Op de lagere school heb ik lange tijd het idee gehad om naar de ambachtsschool te gaan; de techniek trok mij zeer aan. Het hoofd van de school adviseerde mij echter om naar de HBS te gaan, met als argument dat het daarna gemakkelijk was om door te gaan op de MTS (vergelijkbaar met de huidige HTS). Op de lagere school was ik al geboeid door puzzeltjes die met rekenen te maken hadden. Bijvoorbeeld van de soort: als "JAN + PIET = RUZIE", welke getallen stellen de letters dan voor? Op de HBS zette zich dit voort met veel belangstelling voor de wiskunde. In de vierde klas kreeg ik een wiskundeleraar die privé-lessen gaf om de wiskundige activiteiten bij leerlingen te stimuleren. Hij gaf mij boeken over differentiaalrekening en integraalrekening. In die tijd was het mogelijk om in de hoogste klassen van de HBS al te studeren voor de zogenaamde K1-akte. Mijn wiskundeleraar raadde mij dit overigens af met het argument dat dit ouderwetse wiskunde was. Hij adviseerde mij om op de universiteit te gaan studeren. Ik studeerde eerst in Leiden, vervolgens in Utrecht, en ten slotte weer in Leiden. Ik ben ook in Leiden gepromoveerd. Op de HBS in Warffum, en op het gymnasium in Breda was ik enige tijd wiskundeleraar, alvorens in 1953 naar de universiteit van Utrecht te*

*gaan. Daar ben ik tot mijn pensionering in 1988 gebleven. Onder invloed van Freudenthal ging ik mij ook weer meer met het voortgezet onderwijs bezighouden. Het was de tijd van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde waarin ik als lid benoemd werd. Er was toen veel beweging in het wiskundeonderwijs, men vond dat er modernere dingen in aan bod moesten komen. De invoering van de Mammoetwet leverde veel werk op voor de commissie. In 1971 werd het IOWO gestart, wat later over zou gaan in OW&OC. Na Freudenthals terugtreden leidde ik tot mijn pensionering deze vakgroep. Binnen het IOWO en later OW&OC werd er zowel aan het rekenonderwijs voor de basisschool als aan de wiskunde in het voortgezet onderwijs gewerkt; ik heb mij voornamelijk met het voortgezet onderwijs beziggehouden. Na deze periode ben ik nog voorzitter van de werkgroep 12 - 16 geweest.*

Het vak wiskunde neemt om allerlei redenen een aparte plaats in in het voortgezet onderwijs. Wat zou dit voor de leerlingen moeten betekenen?

*Gezien de verschillende begaafdheden van kinderen is een lange brugperiode aan het begin van het voortgezet onderwijs voor wat betreft*

*wiskunde niet gewenst. Voor de leerlingen met aanleg voor wiskunde is er niet genoeg uitdaging, en voor de leerlingen die zwak in het vak zijn wordt het op den duur erg vervelend. Het is ook voor leraren heel moeilijk om gedurende een lange brugperiode alle leerlingen voldoende tot hun recht te laten komen. Ik ben er daarom voorstander van kinderen na een korte brugperiode uit te splitsen, in elk geval voor het vak wiskunde.*

*Toen de basisvorming werd ingevoerd was het mijn ideaal om drie niveaus in te voeren: wiskunde op lbo a/b niveau, wiskunde op mavo c/d niveau, en wiskunde op havo/vwo niveau. Toen de plannen*



Een typerende foto van Van der Blij als gedreven docent en uitlegger. *Nationale Wiskunde Dagen 1997.*

Met dank aan de Nieuwe Wiskrant, waaruit deze foto werd overgenomen.

*voor de basisvorming voor de eerste keer werden aangeboden werd er nog van drie niveaus uitgegaan. Dit werd echter onmiddellijk afgekeurd en het werk moest maar opnieuw gedaan worden, waarna er formeel twee niveaus werden vastgesteld. Mijn advies in de huidige situatie is om op categorale vwo-scholen de wiskunde in de eerste drie jaar op een veel hoger niveau aan te bieden dan volgens de basisvorming vereist is. Op een bredere scholengemeenschap met*

heterogene klassen zal dit voor een leraar waarschijnlijk wel onmogelijk zijn. In de onderbouw kunnen voor de goede leerlingen de kangoeroewedstrijden een goede prikkel zijn, en voor de bovenbouw de wiskundeolympiade. Een belangrijk element voor het stimuleren van de betere leerlingen moet naast het probleemoplossen ook het aanbieden van enige theorie zijn.

De basisvorming draait nu al een aantal jaren. In evaluaties is er niet altijd een positief beeld naar voren gekomen. Hoe kijkt u daar nu tegen aan?

Zoals al opgemerkt kent de basisvorming formeel twee niveaus. Ook op het hoogste niveau komen leerlingen met een meer dan normale begaafdheid en interesse in wiskunde niet aan hun trekken. Ze vinden het te saai, het biedt geen uitdaging. In een heterogene klas ligt het gemiddelde niveau vaak lager dan vroeger in de eerste klassen op HBS en gymnasium het geval was. Als leerlingen extra goed zijn in wiskunde is het zeer waardevol dit verder te stimuleren. Op twaalfjarige leeftijd kun je kinderen al best selecteren op wiskundige begaafdheid, in tegenstelling tot wellicht andere vakken. De rol van de wiskundeleraar hierin is zeer belangrijk. In een geuniformeerde situatie zoals de basisvorming is, lijkt het niet mogelijk iets anders dan wiskunde uit het dagelijks leven aan te bieden. Lang niet alle leerlingen zullen geïnteresseerd zijn in zuivere wiskunde. Het is de taak van de leraar daar adequaat op in te spelen.

Een nieuw fenomeen in de tweede fase voortgezet onderwijs is het studiehuis. Het idee is dat leerlingen vrij weinig klassikaal onderwijs krijgen, en in plaats daarvan zelfstandig leerstof bestuderen of aan opdrachten werken. Hierbij is dan één of meer docenten aanwezig die bij problemen geraadpleegd kunnen worden. Wat betekent dit voor het vak wiskunde?

*In mijn eigen onderwijspraktijk ben ik er altijd van uit gegaan dat voor een goed functioneren van het onderwijsproces de volgende elementen van belang zijn:*

*klassikaal onderwijs,  
zelfstandig werken onder begeleiding,  
eventueel opdrachten waar een leerling wat extra onderzoek moet doen,  
huiswerkopdrachten waar een leerling zonder verder onderzoek of begeleiding mee aan de slag kan gaan.*

*In het studiehuis vind ik het zelfstandig werken en het eventueel nader onderzoek doen terug. Echter een situatie waarbij leerlingen geacht worden zelf te werken en er slechts een docent ter consultatie aanwezig is, lijkt mij zinloos. Ik heb groot bezwaar tegen een leraar die zich passief opstelt. Ook bij het zelfstandig werken door leerlingen dient de docent zelf actief aan het onderwijsproces deel te nemen. Hij activeert en stimuleert. En als het over het vak wiskunde gaat is begeleiding door een docent met een gedegen wiskundeopleiding een must. Er moet een degelijke vakinhoudelijke component zijn.*

Ook nieuw zijn praktische opdrachten en profielwerkstuk. Hier kan ik mij nog weinig bij voorstellen. Als leraar zou ik hier heel enthousiast over kunnen zijn, mits er collega's, ook van andere vakken, zijn waarmee ik dit kan opzetten. Bovendien moet er voldoende tijd zijn om één en ander goed te kunnen voorbereiden. Dit laatste zal zoals zo vaak wel weer een probleem opleveren. Als het lukt zal de communicatie tussen de verschillende vakken hierdoor zeker zowel voor de leerlingen als voor de leraren verbeteren.

Eén van de klachten van de universiteiten is dat de studenten geen enkele vaardigheid in het leveren van bewijzen hebben. Het pro-

gramma voor wiskunde B bood daar ook vrijwel geen ruimte voor. In de nieuwe tweede fase wordt er in de wiskundeprogramma's voor de beide B-profielen wel expliciet aandacht besteed aan dit onderwerp. Is 'bewijzen' een reële optie voor het voortgezet onderwijs, en wat zou dat dan moeten inhouden? *Bewijzen is een zinvolle bezigheid voor alle leerlingen, mits het gaat over dingen die niet vanzelfsprekend zijn. De betekenis van deze bezigheid overstijgt de wiskunde, en kan ook op allerlei andere gebieden van nut zijn. Je moet leerlingen confronteren met bewijzen daar waar het zin heeft, en ze bijvoorbeeld niet lastig vallen met een bewijs dat de basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn. In het wiskundeonderwijs was er een traditie vanuit de Euclidische meetkunde. Opgaven waren van de vorm: gegeven, te bewijzen, bewijs. Een probleem in een dergelijke opzet is dat goede axioma-systemen, en dat geldt zowel voor de meetkunde als voor de algebra/analyse-stof in het voortgezet onderwijs, te gecompliceerd zijn, en dus in deze fase van het onderwijs onbruikbaar. Ik denk dat je je in het voortgezet onderwijs tevreden moet stellen met zogenaamde locale bewijzen, die je wellicht beter als redeneringen dan als bewijzen kunt typeren. Er moet dan wel sprake zijn van locale exactheid. Een voorbeeld. In iedere driehoek is een ingeschreven cirkel. Denk maar aan een cirkel die aan twee zijden van een driehoek raakt en helemaal binnen de cirkel ligt. Beschouw hem als een ballon die je op kan blazen terwijl hij binnen de driehoek blijft. Op een bepaald ogenblik raakt de ballon aan de derde zijde, en we hebben een ingeschreven cirkel. Hierbij gebruiken we een intuïtieve continuïteit. Een meer formeel bewijs kan natuurlijk ook gegeven worden. De verzameling van de punten binnen de driehoek die evenver van twee zijden liggen is dat deel van de hoekdeellijn dat binnen de driehoek ligt.*

*De betreffende stukken van de hoekdeellijnen vanuit twee hoekpunten hebben een punt gemeen. Een eenvoudige logische, meetkundige redenering laat zien dat dit punt evenver van de drie zijden van de driehoek af ligt, en dus het middelpunt van de ingeschreven cirkel is.*

*Wanneer we niet het aangegeven lijnstuk van de hoekdeellijn hadden genomen, maar de verzameling van punten die evenver van de twee zijden liggen hadden genomen, hadden we niet één middelpunt maar de vier middelpunten van de aangeschreven en ingeschreven cirkels gekregen. Zonder daar verder op in te gaan gebruikten we bij dit bewijs ook continuïteit en ordening.*

*Bewijzen in de schoolwiskunde komt altijd neer op het opnieuw aantonen van door anderen gevonden resultaten. Veel formuleringen van opgaven geven dit duidelijk aan: bewijs dat in een driehoek met zijden 13, 14 en 15 één van de hoogtelijnen gelijk is aan 12.*

*De leerling weet dus het antwoord al lang maar wordt toch gedwongen dit opnieuw aan te tonen. Een alternatieve formulering voor een dergelijk vraagstuk zou kunnen zijn:*

*onderzoek de lengtes van de hoogtelijnen in een driehoek met zijden 13, 14 en 15.*

*Het zoeken naar constructies en oplossingen heeft de voorkeur boven het geven van bewijzen van door anderen gevonden resultaten. Beperk het formele bewijzen tot die leerlingen die het zware B profiel kiezen.*

*Voor mijn gevoel zijn leerlingen gevoeliger voor vragen als 'Is dit altijd zo' dan voor opdrachten 'Bewijs dat dit altijd zo is'.*

Al jarenlang is er een buitengewoon klein aantal vwo-ers dat wiskunde gaat studeren. Dit leidt tot tekorten op allerlei gebieden. Ook in het voortgezet onderwijs, in het bijzonder in het vwo komen er steeds minder docenten met een universitaire opleiding. Hoe zou je leerlin-

gen die goed zijn in wiskunde kunnen stimuleren om wiskunde te gaan studeren?

*Het aantal potentiële wiskundestudenten in 5 en 6 vwo is erg klein, mogelijk niet meer dan één of twee leerlingen per klas. Een leraar zou deze leerlingen extra kunnen stimuleren, maar kan zich aan de andere kant weer niet te veel op zo'n klein aantal richten. Beter zou het zijn om bijvoorbeeld regionaal groepjes van minimaal 10 leerlingen te vormen die bijvoorbeeld eens per maand op een zaterdagmorgen bijeenkomen onder leiding van een wiskundeleraar en iemand van een universiteit. Hier zouden ook natuurkundigen en/of informatici een rol kunnen spelen. Het materiaal voor dergelijke bijeenkomsten zou landelijk gecoördineerd moeten worden en zou bijvoorbeeld via Internet beschikbaar gesteld kunnen worden. Er zit voor*

*de universiteiten het gevaar aan verbonden dat als dit soort activiteiten landelijk georganiseerd zou gaan worden men potentiële studenten aan een concurrent kwijt raakt. Maar dat risico zou men dan maar op de koop toe moeten nemen. Ervaringen die er op dit gebied zijn (bijvoorbeeld masterclasses), worden nu niet landelijk gecoördineerd. Dergelijke activiteiten moeten wel een ander karakter hebben dan de Olympiade-activiteiten. Het moet niet alleen op probleemoplossen gericht zijn, er moet ook leerstof worden aangeboden. Activiteiten die in kaleidoscoop-achtige colleges op verschillende universiteiten worden aangeboden zouden als voorbeelden kunnen dienen.*

*Bram van Asch*

## Advertentie Efa / UvA