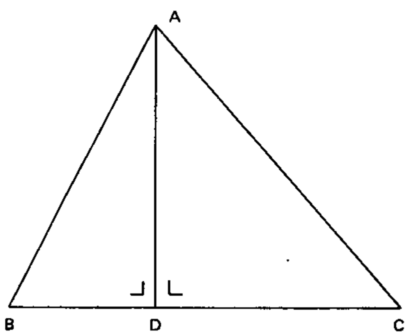
Het bewijs op school*

F. VAN DER BLIJ

Op een dag die als titel draagt: 'wat te bewijzen was' moet ik vanuit het secundaire onderwijs praten. De titel is de laatste zin van de ouderwetse schoolopgave. Maar deed je dat bij gonio-opgaven niet vaak zo? Op een klad blaadje rommelde je wat aan met formules, maar om het netjes op te schrijven moest je dan onderaan beginnen. Vandaag beginnen we dus met 'wat te bewijzen was'. En we hopen in de loop van de dag te ontdekken wat gegeven en wat gevraagd was.

We beginnen met een voorbeeld:
Meester zegt:

> Als de zijden van een driehoek 13, 14 en 15 zijn, dan is de hoogtelijn op de zijde van 14 gelijk aan 12.



De leerling schreef:

Gegeven: $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$, $\angle D = 90°$.
te bew.: $AD = 12$.

Bewijs:
I Opp $= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
Dus $7 \cdot AD = 84$, dus $AD = 12$.

*) Naar een voordracht op 6 januari 1979 op de dag 'Wat te bewijzen was' door het Wiskundig Genootschap georganiseerd.

II $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta$
$225 = 169 + 196 - 364\cos\beta$
dus $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$
dus $AD = 12$.

Maar niet alle leerlingen komen op zulke fraaie ideeën. Ik ga nu maar wat verzinnen.

III Stel $AD = 12$, dan $BD = 5$ volgens Pythagoras in $\triangle ABD$. Dus $DC = 14 - 5 = 9$. In $\triangle ADC$ voert Pythagoras tot $AC = 15$. En dat is zo, dus klopt het, dus $AD = 12$.

Alle leraren boos. Dit is geen bewijs, streep er door. Geef ons maar I of II. Of zou iemand het idee van III willen repareren? Er zit toch wel wat in?

IV Stel $AD < 12$, dan $BD > 5$ (in $\triangle ABD$). Dan ook $DC > 9$ (in $\triangle ACD$).
Dus $BC = BD + DC > 14$. En dit is onjuist.
Stel $AD > 12$, dan $BD < 5$ en ook $DC < 9$. Dus
$BC = BD + DC < 14$. En ook dit is onjuist.
Bijgevolg geldt $AD = 12$. Wat te bewijzen was!

We stoppen met het voorbeeld. Maar bent U het wel met mij eens dat we beter niet hadden kunnen vragen: bewijs $AD = 12$; maar liever: bereken AD. Wat we bewijs I en II noemden kunnen we handhaven. Op idee III waren we wel niet gekomen en dan was IV niet nodig geweest.
Hoe zou meester op het idee gekomen zijn dat $AD = 12$? Door precies meten, of door raden of via overlevering? Of wist de meester het bewijs en moest de leerling het kunststukje nadoen!

Kunnen we uit de school klappend nog geheel andere voorbeelden van bewijzen vinden? Een bewijs van

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

of van

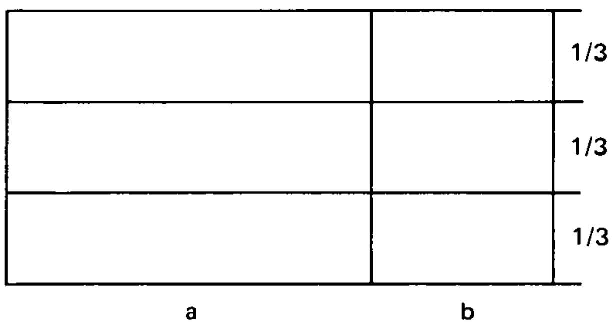
$${}^{b}\log a = \frac{{}^{g}\log a}{{}^{g}\log b}.$$

Vroeger gaven we als leraar heus wel bewijzen voor zulke uitspraken. Maar we overhoorden ze lang niet altijd, we vroegen van de leerlingen geen vaardigheden op dit gebied.
Er is ook een moeilijkheid bij deze bewijzen, namelijk wat is het gegeven? Was het meetkundige bewijs niet meer een som dan een stelling? In de 'echte' wiskunde vinden we ook geen gegeven, gevraagd, bewijs maar definitie, stelling, bewijs. Het q.e.d. is versimpeld (of is er meer aan de hand?) tot een $\square$.
Hoe sterk onze behoefte tot bewijzen eigenlijk een behoefte tot het oplossen van problemen, tot het vinden van algorithmen is, blijkt ook uit het feit dat

ieder wel iets zegt over het feit dat het produkt van twee differentieerbare functies f en g weer differentieerbaar is, maar niemand over de vraag of het product van twee integreerbare functies weer integreerbaar is. Het eerste is nuttig, want $(fg)' = f'g + fg'$, het laatste heb je nooit nodig, want uit de primitieven van f en van g is die van fg niet via een algorithme te vinden.

Het nieuwe programma in het voortgezet onderwijs heeft een ander accent aan de meetkunde gegeven. Helaas heeft dit geleid tot een veel te veel op de achtergrond dringen van meetkundig inzicht. Daarbij, en dat is een geheel andere zaak, zijn ook de klassieke meetkundige bewijzen gesneuveld. En dat geeft de vervolgopleidingen (speciaal de vervolgopleiding voor wiskundigen) zorgen. 'Ze kunnen niet meer bewijzen!'
En daarom zijn we vandaag hier: Wat te bewijzen was.
Vanuit het voortgezet onderwijs beginnen we de dag, straks zal prof. De Bruijn meer formeel de deductie als direct apparaat voor het bewijzen aan de orde stellen. Dan zullen we duidelijk zien dat er naast gegevens ook nog regels moeten zijn waarmee we uit het gegeven naar het te bewijzene gaan. Vanmiddag zal dr. Van Benthem ingaan op het bewijzen als een proces, een discussie en vallen en opstaan in een discussie, onder andere vanuit dat mooie didaktisch-historische boekje van I. Lakatos.

Enkele weken geleden mocht ik op een conferentie met docenten aan de nieuwe leraarsopleiding over hetzelfde onderwerp praten. Ik citeer enkele gebeurtenissen van die dag. Ik vroeg te bewijzen $\frac{2}{3}(a + b) = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b$. Maar gaf geen toelichting. Iedereen weet toch wat $\frac{2}{3}$ is en wat $+$ en $=$ betekenen. En a en b? Sommigen gaven een bewijs met een plaatje:



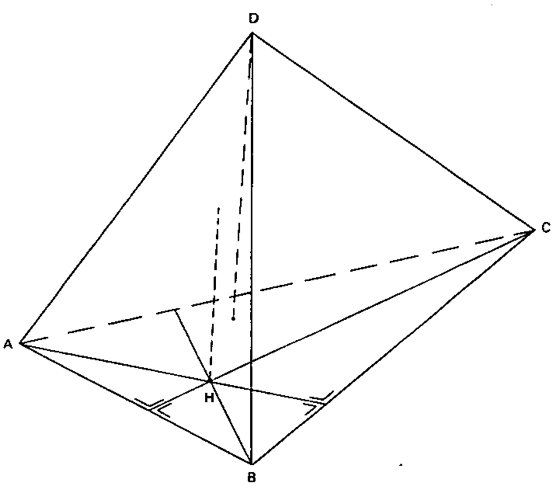
Vindt U dat een bewijs?
Anderen zeiden: de distributieve wet, die geldt immers.
Weer anderen: Stel

$$a = \bar{a} + \bar{a} + \bar{a} \text{ en } b = \bar{b} + \bar{b} + \bar{b}, \text{ dan } \tfrac{2}{3}(a + b) =$$
$$= \tfrac{2}{3}(\bar{a} + \bar{a} + \bar{a} + \bar{b} + \bar{b} + \bar{b}) = \tfrac{2}{3}[(\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} + \bar{b})] =$$
$$= (\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} + \bar{a} + \bar{b} + \bar{b} = \tfrac{2}{3}a + \tfrac{2}{3}b.$$

Maar is dat een bewijs?
En hoe doe je

$$\tfrac{1978}{2012}(a + b) = \tfrac{1978}{2012}a + \tfrac{1978}{2012}b?$$

De zaal roept dan in koor, de klas trouwens ook: Dat doe je net zo.
En dat is dan een bewijs! Of gaat U voor alle t, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, bewijzen dat $\frac{t}{n}(a + b) = \frac{t}{n}a + \frac{t}{n}b$. Nog één keer: wat is het gegeven? Mochten er onder U zijn die zeggen: dit is geen echt probleem, als je een echt probleem stelt zie je vanzelf wat gegeven is en wat je mag gebruiken. O, ja? Dan maar weer een voorbeeld.
Vier kruisende lijnen in de ruimte hebben in het algemeen twee transversalen, lijnen die alle vier snijden. Alleen in bijzondere ligging kunnen ze er oneindig veel hebben, deze lijnen vormen dan een kwadratisch oppervlak, een paraboloïde of eenbladige hyperboloïde, weet U wel, zo'n koeltoren of bloemvaas.



Stelling: Als de vier hoogtelijnen van een viervlak niet door één punt gaan, hebben ze oneindig veel transversalen.
Bewijs: Laat H het hoogtepunt zijn van $\triangle ABC$. Richt in H de loodlijn op het vlak ABC op. Deze snijdt de lichaamshoogtelijnen uit A, B en C respectievelijk. Hij is evenwijdig met de lichaamshoogtelijn uit D, en snijdt deze dus in het oneindige. We vinden dus al één transversaal van de vier lichaamshoogtelijnen. Maar we kunnen de rol van de hoekpunten verwisselen en vinden zo dus vier transversalen, dus meer dan twee, dus oneindig veel.

Is dit nu een bewijs-schets of een bewijs? Wat was het gegeven, wat heb ik al zo gebruikt? Iemand die veel ervaring in dit soort meetkunde heeft is best tevreden met dit bewijs. Een ander zal vallen over 'evenwijdig dus snijden in het oneindige'. Weer een ander zal verder gaan en zeggen: o, maar dan kan je een stelling formuleren die ook nog geldt als de vier hoogtelijnen door één punt gaan.

Wellicht vond U het bewijs van $\frac{2}{3}(a + b)$ flauw en had U eigenlijk die zaak van de vier hoogtelijnen in een viervlak liever zelf uitgezocht, jammer dat ik zo direct met een bewijs aan kwam. We willen het wiskunde onderwijs meer ontdekkend geven. Het is zo leuk, dat het kan. Bij veel andere vakken is dat zoveel moeilijker. Rijtjes derde-vierde naamval voorzetsels of onregelmatige meervouds vormen in het Duits laten ontdekken door onvermoeide lectuur van van de Frankfurter Allgemeine, Bildzeitung, Goethe en Böll kan misschien, maar is wel veel werk. Woord betekenissen ontdekken uit context kan misschien gedeeltelijk, maar nooit integraal. En hoe geef je zelf ontdekkend geschiedenis onderwijs? De wiskunde is een bevoorrecht vak en wiskunde leraren zijn bevoorrechte docenten! Soms hadden we de gewoonte in de meetkunde de stellingen zo maar te poneren en de leerlingen in het beste geval met de vraag naar een bewijs op te schepen. Vaak ook lieten we ze alleen maar een bewijs nadoen of zelfs uit het hoofd leren. Maar the proof of the pudding is in the eating! We willen de leerlingen meer laten ontdekken. Als je iets ontdekt hebt, weet je het, is het je eigendom. Maar dan geloof je er ook in. Waarom dan nog een bewijs? Wat kan dat nog extra opleveren? O, als een ander je tegenspreekt, er niet in gelooft, dan moet je gaan redeneren, dan moet je proberen hem te overtuigen, dan ga je een bewijs geven. Het kan ook gebeuren, dat je van je ontdekking nog niet zeker bent. En dat je jezelf aan het twijfelen brengt.
Voorbeeld:

Als $a^2 + b^2 + c^2 = d^2, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
dan $a \cdot b \cdot c \cdot d \equiv 0 \pmod{12}$

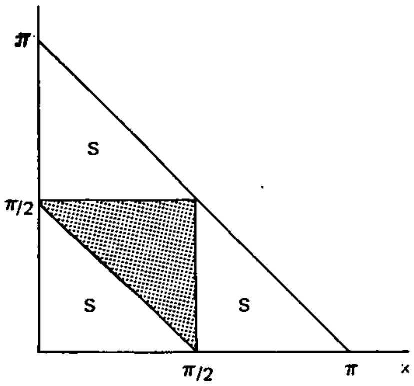
je gaat zoeken naar voorbeelden:

$$\begin{array}{ll} 1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2, & 1^2 + 8^2 + 32^2 = 33^2, \\ 3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2, & 1^2 + 6^2 + 18^2 = 19^2, \\ 1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2, & 2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2, \end{array}$$

maar je voelt je nog niet zeker. Dus maar een bewijs. Omdat een oneven kwadraat altijd een 8-voud + 1 is, moeten tenminste twee van de vier getallen a, b, c en d even zijn.Omdat een kwadraat altijd òf een 3-voud òf een 3-voud + 1 is, moet òf d een drievoud zijn of tenminste 2 van de getallen a, b en c een drievoud zijn. Nu is het vermoeden bewezen. En ieder was van de noodzaak van een bewijs overtuigd.

Even een klein grapje: Een derde macht is altijd een 7-voud òf een 7-voud + 1 òf een 7-voud − 1. Hieruit volgt dat als $a^3 + b^3 = c^3$ met a, b, $c \in \mathbb{Z}$ dan $a \cdot b \cdot c \equiv 0 \pmod 7$. Maar door voorbeelden waren we nooit op dit idee gekomen. Met meer moeite kan men immers bewijzen dat zelfs $a \cdot b \cdot c = 0$, zodat er alleen triviale voorbeelden bestaan.
Wilt U een voorbeeld van een discussie? Hoeveel % van àlle driehoeken is scherphoekig? Natuurlijk 0%. Want kies A en B maar vast en zie bij welke plaats van C in het vlak er een scherphoekige, resp. stomphoekige driehoek ontstaat. Nee, natuurlijk 25%, want kies maar twee hoeken α en β met $\alpha + \beta < \pi$. Alleen in de gearceerde driehoek hebben we de hoeken α, β (en γ)

van een scherphoekige driehoek. In de gebieden S is één hoek stomp. De discussie kan beginnen*.



Hebben we op school ook zulke situaties? Is de som van de hoeken van een driehoek altijd 180°, gaan de drie hoogtelijnen van een driehoek altijd door één punt?

Waarom is $\dfrac{a+c}{b+c}$ in het algemeen ongelijk aan $\dfrac{a}{b}$ en $\dfrac{a \cdot c}{b \cdot c}$ wel gelijk aan $\dfrac{a}{b}$?

Waarom is $\sqrt{a^2b^2}$ wel ab, maar $\sqrt{a^2 + b^2}$ niet $a + b$?
Er is een x met $x^3 + x = 1$, of niet soms?

Er is een functie f met $f'(x) = \sqrt{1 + x^4}$, of niet soms?

Moeilijker wordt de situatie met $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ is een wortel van $ax^2 + bx + c = 0$. Geloof je het niet? Vul dan maar in!
De inhoud van een bol is $\frac{4}{3}\pi R^3$. Dat kan niemand raden, dat kan niemand verifiëren. Dat kan alleen een wiskundige bewijzen! Wel kan je meetkundig inzien dat de inhoud evenredig is met R^3. Ook dat $I < 8R^3$ en dat $I > \frac{8}{9}R^3\sqrt{3}$. Vergelijken van een halve bol met een cylinder en een kegel geeft $\frac{2}{3}\pi R^3 < I < 2\pi R^3$. Nu heb ik toch al bijna de gok $I = \frac{4}{3}\pi R^3$ gekregen, maar geen enkele aanwijzing voor een bewijs!
Het uur is om, wat begon met 'wat te bewijzen was' moet eindigen met de stelling, die we in het afgelopen uur bewezen hebben. Ik ben nog niet aan een formulering toe. Bij het wiskunde onderwijs aan 12-18 jarigen moet de nadruk liggen op het wiskunde ontwikkelen. Het proces van mathematiseren, modelbouwen, ontdekken, controleren,onderzoeken voert tot *uitspraken*. Veelal geeft het proces zelf de overtuiging en het inzicht dat de uitspraak juist is. Dan is er bij de leerling geen natuurlijke behoefte voor een bewijs. Het lijkt onderwijskundig dan niet nodig, deze behoefte te kweken. Maar als een eenvoudig raadproces tot een vermoeden voerde, dan is het oproepen van een discussie van welles-nietes en het beslechten van deze strijd met een redenering, een bewijs, een goede zaak. Moeilijk is het geval waarin de klas de redenering aanvaardt en U zelf als docent bezwaren heeft. Dan moet U analogie redeneringen ontzenuwen met tegenvoorbeelden. En dat is lang niet altijd eenvoudig. Heeft U

* Zie b.v. een recent artikel van Dan Shine Acute vs Obtuse-Revisted. J. Recreat. Math. *11* (1978-79) p. 22-24.

wel eens 'bewijzen' van de grote stelling van Fermat of van de oplossing van het vierkleuren probleem moeten weerleggen? Zouden we in zo'n geval grijpen naar een formeel bewijs schema, zoals de natuurlijke deductie waar prof. De Bruijn op deze dag over bericht? (Zie Euclides blz. 7 en 66)
Is er plaats en noodzaak voor bewijzen op school? Ze kunnen het niet meer, verzuchten de wiskundige vervolgopleidingen. Maar op school geven we wiskunde onderwijs niet voor de a.s. wiskundigen, maar voor de velen die in andere disciplines de wiskunde zullen moeten toepassen, röntgenartsen, geologen, binnenhuisarchitekten. Roepen zij om bewijs of om meetkundig inzicht? Wij zullen het eens zijn dat in het wiskunde onderwijs zowel aan 'afhakers' als aan 'toepassers', als aan 'beoefenaars' analyseren, ontdekken, redeneren de centrale rol moeten spelen en niet het memoriseren noch van definities, noch van stellingen, noch van bewijzen.
Een bewijs past op school bij een discussie welles-nietes, bij een door raden ontstaan vermoeden (analogie of heuristiek). Slechts in een grote uitzondering ontmoeten we op school de formele axiomatische opbouw met axioma-stelsels en deductie-regels. En een goed inzicht in een formeel bewijs lijkt mij niet in zijn volle uitvoerigheid mogelijk of wenselijk.