

VISIE OP WISKUNDE IN HET VOORTGEZET ONDERWIJS

PWN Commissie Onderwijs
31 oktober 2017

In het kader van Curriculum.nu is de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) gevraagd een visiedocument aan te leveren aan het ontwikkelteam Rekenen en Wiskunde. Dit document dient de rol van rekenen en wiskunde in het voortgezet onderwijs te karakteriseren en in te gaan op de positie van deze vakken over tien jaar, met speciale aandacht voor samenhang en doorlopende leerlijnen. De NVvW heeft de vraag voorgelegd aan de Commissie Onderwijs van de koepelorganisatie Platform Wiskunde Nederland (PWN) in haar rol als permanente curriculumcommissie voor wiskunde.

Samenvatting

Wiskunde is in het vo niet alleen nu maar ook over tien jaar een kernvak vanwege haar waarde voor vorming, voor maatschappelijke toerusting en voor het leggen van een fundament voor andere leergebieden, vervolgopleidingen en beroepen. De huidige invulling en inbedding van het vak Wiskunde sluit niet optimaal bij deze waarden aan. Wij doen een concreet voorstel voor aanpassing van de leerlijnen wiskunde. Hierbij legt de onderbouw een brede basis gericht op burgerschap (waaronder gecijferdheid, statistische geletterdheid en algoritmisch denken) en fundering. De bovenbouw kan zich dan sterker richten op beroepen en vervolgopleidingen, waarbij wij zowel voor vmbo als voor havo en vwo een voorstel doen voor differentiatie.

Wiskunde is funderend en dragend

Onze visie op wiskunde in het voortgezet onderwijs bouwt voort op zienswijzen van diverse groepen die de afgelopen jaren met de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs bezig zijn geweest. Wij verwijzen naar het visiedocument *Rijk aan betekenis* en het eindrapport *Denken & doen* van de Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs [cTWO 2007, 2012], de *Visie op het bètacurriculum* van de Stichting IOBT [2015] en het *Deltaplan* van PWN [2015].

De relevantie van wiskunde in het vo loopt als rode draad door deze zienswijzen. Wiskunde is een kernvak vanwege haar historisch, cultureel, wetenschappelijk en maatschappelijk belang. Wiskunde is onmisbaar voor de versterking van de innovatiekracht van Nederland en heeft een vormende waarde door het stimuleren van nieuwsgierigheid en een probleemoplossende houding. Wiskunde is noodzakelijk voor *scientific literacy*, wat de verantwoorde burger nodig heeft om te kunnen functioneren in de huidige kennissamenleving.

Wiskunde in het vo gaat over een aantal kernconcepten: getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Hierbij hoort een manier van denken die typerend is voor de wiskunde: abstraheren, modelleren en probleemoplossen. Het is belangrijk dat het onderwijs een balans vindt tussen het aanleren van conceptuele en procedurele vaardigheden.

Contexten spelen in het wiskundeonderwijs een andere rol dan in andere domeinen. In de didactische vormgeving van de curricula staat een intern-wiskundig samenhangend netwerk van concepten centraal. Wiskundige of toegepaste contexten kunnen daaraan een bijdrage leveren. Niet-authentieke contexten kunnen als metafoor fungeren maar dienen in het algemeen te worden vermeden.

Het hangt sterk van het schoolniveau en het schoolprofiel van de leerling af welke kernconcepten de meeste aandacht behoeven en op welke wijze een balans wordt gevonden tussen intern-wiskundige samenhang en toepassing. Samenhang met andere vakken, vervolgopleidingen en beroepen is belangrijk. Wiskunde sluit vanouds aan bij andere bètavakken en in toenemende mate ook bij sociaal-maatschappelijke disciplines.

Op havo en vwo verdient de beheersing van correcte wiskundige terminologie en notatie een structurele plaats in het onderwijs. Op alle onderwijsniveau's is het belangrijk dat de

aandacht niet zozeer uitgaat naar het *product* (de oplossing) maar naar het *proces* (de redenering).

Statistiek neemt in het wiskundeonderwijs een bijzondere positie in. Onderwijs in de statistiek is gericht op het begrijpen, interpreteren en beoordelen van tabellen, diagrammen en andere vormen van statistische informatie.

Met de komst van de computer en de dataexplosie vinden we overal in de maatschappij kwantitatieve informatie, in het nieuws, in de gezondheidszorg en in de politiek. Voortdurend worden er onderzoeksresultaten geciteerd en conclusies getrokken, niet altijd op een correcte manier. Kennis van statistiek is vereist voor kritisch burgerschap.

Ook bij het uitvoeren van onderzoek en het beoordelen van onderzoeken van anderen zijn statistische kennis en vaardigheden vereist. Ter voorbereiding daarop bieden vervolgstudies statistiekvakken aan, die door veel studenten als lastig worden ervaren. Een goede voorbereiding hierop in het vo is gewenst.

Een brede basis in de onderbouw

Leerlingen krijgen in de onderbouw een brede en stevige basis in de wiskunde. Die basis dient allereerst de burgerschapsontwikkeling. Leerlingen leren systematisch naar de wereld te kijken en om te gaan met alle kwantitatieve aspecten om hen heen. Daarnaast wordt de basis gelegd voor andere schoolvakken, voor de bovenbouw en voor vervolgopleidingen en beroepen. Dat betekent dat de leerlingen in aanraking komen met algebra, analyse, meetkunde en ook met statistiek, een onderwerp dat een belangrijker plaats verdient in de onderbouw. Verder vraagt de huidige maatschappij om redeneervaardigheden en algoritmisch denken (*computational thinking*). Dit laatste onderwerp is gerelateerd aan digitale geletterheid [KNAW 2012].

De tussendoelen voor de onderbouw [SLO 2011] omvatten momenteel zes domeinen: (A) inzicht en handelen, (B) getallen *en variabelen*, (C) verhoudingen, (D) meten en meetkunde, (E) verbanden en formules, en (F) *informatieverwerking en onzekerheid*; de gecursiveerde onderwerpen ontbreken bij het vmbo. Wij doen enkele suggesties:

- De verbinding met andere vakken kan versterkt worden.
- Combinatoriek (tellen, patronen, regelmaat) is nu te instrumenteel en past niet bij een brede vorming.
- Redeneren en algoritmisch denken verdienen meer aandacht.
- Domein (F) kan beter “statistiek” heten. De inhoud kan vernieuwd worden, relevante onderwerpen uit andere domeinen kunnen hier geplaatst worden. Ook op het vmbo is aandacht voor statistiek wenselijk.

Ieder van de genoemde onderwerpen verdient in ieder jaar van de onderbouw en op ieder niveau aandacht, zowel op theoretische als op praktische wijze. De toepassingen komen bij voorkeur op een natuurlijke manier vanuit de andere vakken. De onderbouw biedt een brede basis voor iedereen. Dat vraagt wel om een gedegen hoeveelheid lestijd. Wij volgen cTWO [2012] in haar aanbeveling de contacttijd voor wiskunde in de onderbouw uit te breiden.

Rekenen heeft de laatste jaren een aparte positie gekregen binnen het vo. Het vo heeft tot taak de rekenvaardigheid van de leerlingen te verbeteren en te onderhouden. Wij zien hier voor de onderbouw een belangrijke rol weggelegd.

Rekenen dient een plaats te hebben als basisvaardigheid binnen de wiskunde en als functioneel rekenen in vakken als aardrijkskunde, economie, natuurkunde, scheikunde, biologie en techniek. Wij pleiten voor een doorlopende leerlijn vanuit het primair onderwijs, waarbij in de onderbouw de leerstof van de referentiedomeinen 2F/3F systematisch wordt behandeld en getoetst. In de bovenbouw is er dan geen reden meer om in enig vak een wiskundige aanpak – modelleren, analyseren en rekenen – uit de weg te gaan.

Volgens het regeerakkoord van oktober 2017 zal de rekentoets vervangen worden door het alternatief van de NVvW. Dit alternatief wordt momenteel uitgewerkt door twee gesprekstafels, één voor vmbo en één voor havo/vwo.

Doorstroom vanuit bovenbouw vmbo

De huidige examenprogramma's wiskunde van de vier leerwegen vmbo (bb, kb, gl, tl) kennen een kerndeel. De eenheden hiervan zijn in ieder van de leerwegen dezelfde. De programmatische verschillen beperken zich tot de formulering van eindtermen op slechts twee aspecten, namelijk het noteren van formules en het hanteren van meetkundige formules. Ook is er tussen de leerwegen een verschil in abstractieniveau. Het verschil tussen bb en kb is hier in het algemeen groter dan dat tussen kb en gl/tl.

Daarnaast kennen de examenprogramma's gl en tl een verrijkingsdeel, dat het grootste programmatische verschil vormt tussen gl/tl enerzijds en bb/kb anderzijds. Deze verschillen zijn niet inhoudelijk van aard maar betreffen formeel en probleemoplossend handelen en horizontale samenhang tussen de eenheden van de examenprogramma's.

Een vmbo-diploma biedt geen startkwalificatie. Daarom is het belangrijk de bovenbouw van het vmbo te beschouwen in het licht van de doorstroom. Leerlingen die een vmbo-diploma halen stromen door naar een hoger vmbo-niveau, naar het mbo of naar de havo. Uit onderzoek van SLO [2015] blijkt dat vooral de aansluiting naar de havo problematisch is, ten gevolge van het verschil tussen de eindexameneisen voor het vmbo en de tussendoelen voor de havo. Het betreft hier algebra, kwadratische verbanden en vergelijkingen, en kansrekening. Verder wordt in de onderbouw van de havo over de gehele breedte van de leerstof een hogere mate van exact formuleren en abstract denken verwacht dan in vmbo-gl/tl. De complexiteit van probleemsituaties in de havo-onderbouw verschilt weinig van die in vmbo-gl/tl. De SLO pleit voor een verrijkingsdeel in vmbo-tl gericht op doorstroom naar havo en wiskunde-intensieve mbo-opleidingen.

Naast de doorstroomproblematiek is er een andere reden de wiskundeprogramma's in het vmbo te herzien. Zij zijn al meer dan tien jaar niet gewijzigd. Het is wenselijk om hier een vernieuwingsslag te maken, want de maatschappij verwacht andere kennis en vaardigheden en het vervolgonderwijs stelt andere eisen [NVvW 2015]. De herijking van statistiek op havo en vwo heeft in het vmbo niet plaatsgevonden en ook is er geen afstemming met de nieuwe profielstructuur. Tevens constateert de werkgroep vmbo van de Stichting IOBT [2016] dat op het vmbo behoefte is aan een andere didactische aanpak. Deze is gestoeld op drie principes: *participatie* (verbinden van leren en werken), *functionaliteit* (focus op gebruik van kennis en vaardigheden in beroepscontexten) en *innovatie* (ontdekken en opvullen van kennishiaten in de beroepsuitoefening).

Voorstel. Gezien de problemen in de aansluitingen na een vmbo-diploma pleiten wij voor een substantiële aanpassing van de wiskundeprogramma's op het vmbo. De minister van OCW heeft SLO opdracht gegeven een verkenning uit te voeren naar de precieze eisen die aan de vmbo-wiskunde gesteld zouden moeten worden om de aansluiting te verbeteren. Wij stellen voor deze verkenning af te wachten en de bevindingen daarvan als bouwsteen in het programma van Curriculum.nu op te nemen.

Wat betreft de inhoudelijke vernieuwing van de wiskunde op het vmbo pleiten wij, in navolging van IOBT, voor de invoering van een burgerschapsdeel en een beroepsdeel, en eventueel een keuzedeel. Het burgerschapsdeel richt zich op de kennis en kunde die nodig is in de maatschappij in het algemeen; relevante contexten komen uit de leefwereld en de wetenschap. Hier volstaat mogelijk nog een klassieke didactiek. Het beroepsdeel richt zich op de kennis en kunde die nodig is om goed werk te leveren. De drie hierboven geformuleerde didactische principes komen daar centraal te staan.

Gedifferentieerde onderwijsdoelen in de tweede fase havo/vwo

Het wiskundeprogramma in de bovenbouw van havo en vwo is sinds de invoering van de Mammoetwet een aantal keren fors herzien [APS 2011]. Er is steeds een aantal wiskundevakken geweest. Momenteel zijn dat (naast eventueel Rekenen) Wiskunde A, B en D op havo en vwo en Wiskunde C op vwo. De indeling komt voort uit het inzicht dat verschillende groepen leerlingen

behoefte hebben aan verschillende inhoud, afhankelijk van hun interesses en hun keuzes voor een vervolgopleiding. Mede door de ontkoppeling van de wiskundevakken en de profielen bij de invoering van de nieuwe tweede fase in 2007, gepaard gaande met een effectieve reductie in onderwijstijd en discrepanties in de instroomeisen van vervolgopleidingen, kampt de huidige structuur met een aantal problemen. Deze betreffen onder andere

- de dubbelzinnige invulling van Wiskunde A, dat zowel maatschappij- als natuurprofielen moet bedienen,
- de kwetsbare positie van de kleine vakken Wiskunde C en D,
- het havo-vak Wiskunde B, dat door bijna geen enkele hbo-opleiding wordt geëist, en
- het ontbreken van statistiek in Wiskunde B.

Voorstel. De genoemde problemen vragen in onze ogen om een fundamentele herbezinning op de wiskunde in de tweede fase. Ons uitgangspunt daarbij is aansluiting op vervolgopleidingen.

Gegeven de wiskundekennis en -vaardigheden die vervolgopleidingen vragen, lijken zich drie groepen af te tekenen, bestaande uit leerlingen die kiezen voor:

- (1) culturele of sociale studies of studies in de gezondheidszorg;
- (2) economische of toegepaste bètastudies;
- (3) fundamentele bètastudies of technische studies.

Alle leerlingen hebben baat bij statistiek. De tweede groep heeft daarnaast algebra, analyse en meetkunde nodig, de derde groep dient zich daarin extra te verdiepen. Dit leidt tot ons voorstel voor drie wiskundevakken in de tweede fase, die op de havo afhankelijk van de doelgroep anders kunnen worden ingevuld dan op het vwo:

- Statistiek;
- Wiskunde I: algebra, analyse en meetkunde;
- Wiskunde II: verdieping in algebra, analyse en meetkunde en een compacte module wiskundige statistiek.

De drie hierboven genoemde groepen leerlingen volgen dan de volgende vakken:

- (1) Statistiek;
- (2) Statistiek en Wiskunde I;
- (3) Wiskunde I en Wiskunde II.

Hiermee is voor leerlingen in groep (1) algebra, analyse en meetkunde niet meer verplicht in de bovenbouw, wat op het vwo nu wel het geval is. Wanneer de onderbouw een gedegen basis heeft aangebracht, zoals wij hierboven voorstellen, achten wij dit geen probleem. In ons voorstel wordt statistiek verplicht voor alle leerlingen op havo en vwo, wat een gemis oplost in de huidige structuur. Leerlingen in groep (3) zijn in staat om zich de statistiek sneller eigen te maken. In ons voorstel volgen zij binnen Wiskunde II een versnelde en meer wiskundige module statistiek. Hiermee wordt ook voorkomen dat het vak Statistiek doelgroepen bedient die wat betreft wiskundige capaciteiten te ver uiteenlopen.

De voorgestelde indeling maakt het ook haalbaarder om verbindingen te maken tussen wiskunde en andere schoolvakken:

- (1) aansluiting bij aardrijkskunde en geschiedenis;
- (2) ook aansluiting bij economie, scheikunde en biologie;
- (3) ook aansluiting bij natuurkunde.

ICT-in het wiskundeonderwijs

De afgelopen decennia is de inzet van ICT in het wiskundeonderwijs veelal beperkt gebleven tot de *wetenschappelijke rekenmachine*, die in het basispakket hulpmiddelen voor het centraal examen zit en ook gebruikt wordt bij andere vakken.

In de tweede fase van havo en vwo is de *grafische rekenmachine* bepalend geweest. Deze machine kan grafieken en parameterkrommen tekenen, benaderingen van nulpunten en extremen geven, afgeleide en integraal numeriek benaderen en elementen van recursief gedefinieerde rijen berekenen. Wat betreft kansrekening en statistiek zijn er kansverdelingen beschikbaar (die de tabellenboeken overbodig maken) en kunnen centrum- en spreidingsmaten

bepaald worden. De latere generaties rekenmachines kennen ook mogelijkheden op het gebied van de analytische meetkunde.

Als gevolg hiervan kunnen er complexe en realistische problemen aan de orde worden gesteld. Het tekenen van grafieken, het oplossen van ingewikkelde vergelijkingen en het berekenen van kansen kost immers nauwelijks moeite. Dat leidt tot *use to learn*: door sneller en meer situaties te bekijken, biedt ICT mogelijkheden om wiskunde te ontdekken en te begrijpen. Een ander waardevol aspect, vooral vanuit het perspectief van de hoogtechnologische maatschappij, is het beredeneerd omgaan met ICT: *learn when to use*.

In de huidige examenprogramma's in havo en vwo is er meer aandacht voor data-analyse en analytische meetkunde. Het ligt daarom voor de hand om te bekijken of meer daarop toegeruste ICT-toepassingen (Excel, SPSS of R, GeoGebra) een grotere rol kunnen krijgen. In het verlengde daarvan kan het gebruik van computeralgebra een verrijking van het onderwijs betekenen. Maar het gebruik van geavanceerdere ICT vereist de nodige vaardigheden – *learn to use*.

Bijna tien jaar geleden verscheen het rapport *Use to learn; naar een zinvolle integratie van ICT in het wiskundeonderwijs* [cTWO 2008]. Enkele daarin genoemde aspecten van de rol die ICT speelt in het onderwijs zijn onveranderd:

- ICT is van groot belang in de wiskundeles, maar binnen het vo is nog te weinig ervaring om de potentie van ICT voor het wiskundeonderwijs optimaal te benutten.
- *Learn-to-use* zou deel moeten uitmaken van een uitgebreidere leergang digitale geletterdheid. De nadruk in het wiskundeonderwijs ligt op *use-to-learn*.
- Wiskunde zonder gebruik van ICT blijft van belang, ook bij examinering.
- In de huidige examenprogramma's is terughoudendheid betracht bij het gebruiken van de wiskundige en didactische functionaliteiten die ICT biedt. Afgezien van statistiek, waar uitgebreider gebruik gemaakt wordt van ICT, blijven de wiskundige functionaliteiten beperkt tot functies, grafieken en tabellen. In de didactische functionaliteiten overheerst het gebruik van ICT als gereedschap. Een aantal kansen blijft hiermee onbenut. Voorbeelden zijn software voor meetkunde en voor het modelleren en simuleren van dynamische systemen. Maar ook bij het ontwikkelen van een onderzoekende houding, bij modelleren, bij het oriënteren op en verwerken van nieuwe theorie, bijvoorbeeld in oefenomgevingen, kan ICT een grotere rol spelen dan nu het geval is.

Toetsen

Digitale vormen van toetsing zijn in opmars. Zij kunnen een kwaliteitsverhoging bieden ten aanzien van organiseerbaarheid en betrouwbaarheid. Zij kunnen ook een krachtig instrument zijn om leerlingen op maat te toetsen (adaptieve toetsing) en leerlingen efficiënt feedback te geven op hun leervorderingen (formatieve functie van toetsing). Het toetsen van wiskunde kent echter een complexiteit die in de huidige digitale toetssystemen meestal niet aanwezig is. Dit vraagt om voorzichtigheid en zorgvuldigheid bij het gebruik van digitale toetssoftware. Wij noemen twee belangrijke aandachtspunten.

- Niet zozeer het resultaat (het *product*) is relevant, alswel de denkstappen die tot het resultaat leiden (het *proces*). Leerlingen moeten dus een diversiteit aan denkstappen in de toetssoftware kwijt kunnen, en de geautomatiseerde beoordeling moet daar recht aan doen.
- Wiskunde stelt typische eisen aan de invoer. Bij gebruik van ICT moet het invoeren van formules, grafieken, schetsjes en diagrammen even natuurlijk zijn als met pen en papier.

PWN Commissie Onderwijs

Theo van den Bogaart (Hogeschool Utrecht)

Marjan Botke (Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam)

Wim Caspers (Technische Universiteit Delft; Lyceum Ypenburg, Den Haag)

Jan Karel Lenstra (Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam), voorzitter

Jaap Molenaar (Wageningen University & Research)

Heleen van der Ree (Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren), secretaris

Sanjay Ramawadh (Haagse Hogeschool, Delft)
Margot Rijnierse (Hermann Wesselink College, Amstelveen)
Hester Vogels (UniC Utrecht)

Literatuur

- [APS 2011] Kees Hoogland, Peter van Wijk. *Wiskunde in de bovenbouw van havo en vwo; feiten en overwegingen*. APS, 2011.
- [cTWO 2007] *Rijk aan betekenis; visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, 2007.
- [cTWO 2008] *Use to learn; naar een zinvolle integratie van ICT in het wiskundeonderwijs; eindrapport van de werkgroep ICT van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO*. Ib., 2008.
- [cTWO 2012] *Denken & doen; wiskunde op havo en vwo per 2015; eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO*. Ib., 2012.
- [IOBT 2015] *Visie op het bètacurriculum; bijdrage aan de dialoog Onderwijs 2032*. Stichting Innovatie Onderwijs in Bètawetenschappen en Technologie, 2015.
- [IOBT 2016] *Notitie IOBT—Werkgroep exact onderwijs vmbo*. Ib., 2016.
- [KNAW 2012] *Digitale geletterdheid in het voortgezet onderwijs; vaardigheden en attitudes voor de 21ste eeuw*. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 2012.
- [NVvW 2015] *Notitie aanpassing vmbo*. NVvW, 2015.
- [NWO/PWN 2015] *Een Deltaplan voor de Nederlandse wiskunde*. Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek & Platform Wiskunde Nederland, 2015.
- [SLO 2011] *Tussendoelen wiskunde onderbouw vo vmbo en havo/vwo*. SLO, 2011.
- [SLO 2015] *Goed voorbereid verder met wiskunde*. Ib., 2015